مقدمة وبعض التعاريف والمفاهيم الأساسية

هناك عدة تعاريف للمنطق نذكر منها:

المنطق :هو العلم الذي يقوم بوضع أسس للإجابة على تساؤلات رياضية بالاعتماد على محاكمة عقلية ، يدرس المقدمات للوصول للنتائج .

- أو هو الفرع الذي يهتم بتحديد قيمة منطقية للقضايا المعقدة .
- أو هو العلم الذي يدرس شروط صحة الاستدلال .

> **القضية** : هي جملة خبرية يمكن الحكم عيها بأنها صحيحة فقط أو خاطئة فقط ، ولا يمكن أن تكون صحيحة وخاطئة بآن معاً .
>
> **الاستدلال** : هي قضية صحيحة دوماً .

بشكل عام ، يمكن القول عن المنطق الرياضي بأنه الأداة الفاصلة بين الحقيقة والخطأ.

أنواع المنطق : منطق كلاسيكي ، منطق المكممات ،منطق الإسناديات ، المنطق الترجيحي ، المنطق البولياني.

مفاهيم أساسية (تعريف اللغة ، المنطق الكلاسيكي)

الرمز ($symbol$) : هو كائن مجرد نسميه تجاوزاً محرف ، مثل $0, 1, A, \wedge, \geq, N, b, r, \&, \#, \%, 7, \div, \ldots$

الأبجدية ($Alphabet$)**:** هي مجموعة منتهية غير خالية من الرموز ، ويرمز لها عادةً بـ Σ

مثال: $\Sigma = \{0,1\}$ ، $\Sigma = \{x, y, z\}$

السلسلة : هي تعاقب أو تتالي رموز (محارف).

مثال : لتكن الأبجدية $\Sigma = \{a, b\}$ عندئذٍ كلاً من .... $ab, aab, aba, abab, abbb, aab$ سلاسل مشكلة من الأبجدية Σ . (ويجدر بنا الإشارة أنه يوجد عدد غير منته من السلاسل المشكلة من أبجدية معطاة) .

نرمز بـ ε للسلسلة الفارغة (سلسلة لا تحوي أي محرف).

ملاحظة :لتكن الأبجدية $\Sigma = \{a, b\}$ نقصد بالرمز a^n للسلسلة المكونة من المحرف a مكرر n مرة .
وبالرمز $a^n b^m$ للسلسلة المكونة من المحرف a مكرر n مرة ومن ثم المحرف b مكرر m مرة.
حيث $n, m \in \mathbb{N}$ وعندما $n = 0$ يكون $a^n = a^0 = \varepsilon$.

بادئة سلسلة ($prefix$)**:** هي سلسلة مشكلة من السلسلة الأصلية من بدايتها ، الحرف الأول ،الحرف الأول والثاني، الحرف الأول والثاني والثالث ، .... وهكذا .

لاحقة سلسلة($suffix$)**:** هي سلسلة مشكلة من السلسلة الأصلية من نهايتها ، الحرف الأخير ،الحرف ما قبل الأخير والأخير ،.... وهكذا.



مثال: لتكن الأبجدية $\sum = \{a, b, c\}$ ولتكن السلسلة $\alpha = abbccc$ عندئذٍ:

بادئات هذه السلسلة هي $\varepsilon, a, ab, abb, abbc, abbcc, abbccc = \alpha$

لاحقات هذه السلسلة هي $\varepsilon, c, cc, ccc, bccc, bbccc, abbccc = \alpha$

ملاحظات

السلسلة الفارغة ε هي بادئة ولاحقة لأي سلسلة

1. السلسلة هي بادئة ولاحقة لنفسها
2. إذا كانت البادئة (اللاحقة) لا تساوي السلسلة الأصلية عندئذ ندعوها بادئة (لاحقة) حقيقية أو فعلية أو أساسية أو رئيسية ويقابلها باللغة الإنكليزية المصطلح $proper$

طول سلسلة α: هو عدد مواقع($occurrences$) المحارف التي تشكل السلسلة α ويرمز له بـ $|\alpha|$ أو بـ $lg[\alpha]$

مثال: لتكن الأبجدية $\sum = \{a, b, c\}$ عندئذٍ

$$\alpha = abcaab \Rightarrow |\alpha| = 6 \quad , \quad \beta = abc \Rightarrow |\beta| = 3$$

$$\gamma = b \Rightarrow |\gamma| = 1 \quad , \quad S = \varepsilon \Rightarrow |S| = 0$$

لاحظ أنَّ طول السلسلة الفارغة صفر.

تركيب سلسلتين ($concatenation$): هي سلسلة تنشأ من خلال كتابة سلسلة أولى متبوعة بسلسلة ثانية دون أي فراغ .

مثال : لتكن الأبجدية $\sum = \{a, b, c\}$ ولتكن $\alpha = abb \;,\; \beta = cab$

عندئذٍ تركيب السلسلتين $\alpha\beta$ هو $\alpha\beta = abbcab$

ملاحظة: $\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha$ ، $|\alpha\beta| = |\alpha| + |\beta|$

اللغة ($language$): هي مجموعة جميع السلاسل الممكن تشكيلها من أبجدية معينة $\sum$. ويرمز لها بـ $\sum^*$.

أمثلة : لتكن الأبجدية $\sum = \{a, b\}$ عندئذٍ $\sum^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, ab, b, bb, bab, aba, \dots\}$.

لتكن الأبجدية $\sum = \{x\}$ عندئذٍ $\sum^* = \{\varepsilon, x, xx, xxx, xxxx, \dots\} = \{x^n\}$.

كما نرمز بـ $\sum^+$ لـ $\sum^*\backslash\{\varepsilon\}$ (مجموعة جميع السلاسل عدا السلسلة الفارغة).

في المنطق نعتمد على مبدأين أساسين هما : تحليل تركيبي (إعرابي) $syntax$ و تحليل دلالي (معنوي) $semantics$.



المنطق الكلاسيكي (منطق الجمل ، منطق الصيغ ، أو حساب الفرضيات) *classical logic*

لنعرف المنطق الكلاسيكي أولاً من الناحية التركيبية (تركيب نحوي) ، لذا نبدأ بالأبجدية

$$\mathcal{A} = \mathcal{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\} \cup \{ (\ ,\ ) \}$$

حيث $\mathcal{P} = \{p, q, r, s, t, \dots\} \neq \emptyset$ مجموعة المتحولات المنطقية (*propositional variables*) .

و $\{\neg, \wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\}$ أدوات (*connector*) الربط المنطقية .

و $\{ (\ ,\ ) \}$ الأقواس .

لنأخذ اللغة $A^* = \{p, q, r, \neg p, \neg\neg r, p \vee q \neg, q \Longrightarrow r \neg, \dots\}$

في الحقيقة هذه لغة لكنها بلا فائدة ولا يمكن الاستفادة منها ، الهدف الآن الحصول على لغة لها فائدة ويمكن الاستفادة منها .

إذاً لنعرف لغة المنطق الكلاسيكي .

> **أدوات الربط**
>
> النفي (negation) $\neg$ أو الرمز $\sim$
>
> الوصل (conjunction) $\wedge$
>
> الفصل (disjunction) $\vee$
>
> الاقتضاء (*implication*) $\Longrightarrow$
>
> التكافؤ (*equivalence*) $\Longleftrightarrow$
>
> **ملاحظة :**
>
> يمكن الترميز بـ $\rightarrow$ بدلاً من $\Longrightarrow$
>
> والرمز $\leftrightarrow$ بدلاً من $\Longleftrightarrow$

أولاً لنعرف المجموعة $\mathcal{F}$ المؤلفة من صيغ منطقية منشأة من $\mathcal{P}$ وهي أصغر مجموعة جزئية من $w(\mathcal{A})$ بحيث تحقق الخواص التالية :

١. هذه المجموعة تحوي(تضم) $\mathcal{P}$. أيْ إذا كان $p \in \mathcal{P}$ فإننا نقول إن (p) مقبولة .
٢. إذا كانت F صيغة (*formula*) من اللغة ، فإن $(\neg F)$ من اللغة أيضاً .
٣. إذا كان G و F من اللغة فإن : $(F \vee G)$ و $(F \wedge G)$ و $(F \Longrightarrow G)$ و $(F \Longleftrightarrow G)$ من اللغة أيضاً .

ملاحظة : يوجد على الأقل مجموعة جزئية واحدة تحقق الخواص السابقة هي $w(\mathcal{A})$ نفسها . والمجموعة $\mathcal{F}$ هي تقاطع جميع المجموعات الجزئية من $w(\mathcal{A})$ التي تمتلك تلك الخواص .

> $w(\mathcal{A})$ هي مجموعة أجزاء المجموعة $\mathcal{A}$

أمثلة :

$(p \wedge q) \in \mathcal{F}$ بينما $p \wedge q \notin \mathcal{F}$ أي الأقواس ضرورية ،لكن يمكن إزالة الأقواس تجاوزاً في مثل هذه الحالة . و لكن يجب أن نأخذ بعين الاعتبار أن طول الصيغة $p \wedge q$ هو 5 .

إن كلاً من $((p \Longrightarrow q) \Longrightarrow r)$ و $\neg(A \Longrightarrow A)$ و $(\neg A \Longrightarrow A)$ صيغاً من $\mathcal{F}$.

بيْد أنَّ $(p \Longrightarrow q \Longrightarrow r)$ و $\neg(A)$ ليست صيغاً من $\mathcal{F}$.

.: انتهت المحاضرة الأولى :.